Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. M. Kany
M.Sc. C. Steinhart

8. Übungsblatt zur Linearen Algebra I

Matrizen invertieren, lineare Abbildungen, Gruppen

Aufgabe 1. ((Alleine) 4P)

Berechnen Sie die Inverse der folgenden Matrix A mit Hilfe des Gaußalgorithmus und schreiben Sie A^{-1} als Produkt von Additions-, Diagonal- und Vertauschungsmatrizen.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2. ((Alleine) 2P+2P+2Bonuspunkte)

Seien V und W zwei beliebige $\mathbb{R}$-Vektorräume. Wie für Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ heißt eine Abbildung $\phi : V \to W$ *linear*, wenn für alle Vektoren $v, w \in V$ und Skalare $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $\phi(v + w) = \phi(v) + \phi(w)$

(ii) $\phi(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot \phi(v)$

Sei $\phi : V \to W$ eine lineare Abbildung.

a) Zeigen Sie, dass der Kern von ϕ

$$\mathrm{Kern}(\phi) := \{v \in V \mid \phi(v) = \underline{\mathbf{0}}\}$$

und das Bild von ϕ

$$\mathrm{Bild}(\phi) := \{\phi(v) \in W \mid v \in V\}$$

Untervektorräume von V bzw. W sind.

b) Zeigen Sie, dass ϕ genau dann injektiv ist, wenn $\mathrm{Kern}(\phi) = \{\underline{\mathbf{0}}\}$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass die Menge der linearen Abbildungen

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) := \{\phi : V \to W \mid \phi \text{ ist lineare Abbildung}\}$$

ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(V, W)$ ist.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 15. 01. 2021 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.

Aufgabe 3. ((Gruppe) 2P+2P)

(a) Beweisen Sie Bemerkung II.5.26 aus der Vorlesung, d.h. seien $n, m \in \mathbb{N}$ und

$$\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass es dann eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ gibt, sodass $\phi(v) = A \cdot v$ für alle $v \in \mathbb{R}^m$ gilt.

(b) Sei $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ zu sich selbst. Zeigen Sie, dass ϕ genau dann injektiv ist, wenn ϕ auch surjektiv ist.

Aufgabe 4. ((Gruppe) 2P+2P)

a) Sei $C^\times := \{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid a, b \in \mathbb{R}$ und nicht beide $0\}$. Zeigen Sie, dass $C^\times$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ (mit der üblichen Matrizenmultiplikation) ist. Ist $C^\times$ abelsch?

b) Sei G eine endliche, zyklische Gruppe und $g \in G$ sein Erzeuger. Zeigen Sie dass die Gruppenordnung von G das kleinste $k \in \mathbb{N}$ mit $g^k = \mathrm{id}_G$ ist.
Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass für die von g erzeugte Gruppe $\langle g \rangle = \{g^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ gilt.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 15. 01. 2021 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.